4ème Tec+Science

Série Révision N°3

"Espace + Sphère"

EXERCICE N°1 :

Soit $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace ,les points A(1,0,1) ; B(1,1,1) et C(0,0,1).

1) a- Montrer que O, A, B et C ne sont pas coplanaires.

b- Calculer le volume v et la hauteur H du tétraèdre OABC.

2) a- Déterminer un vecteur normal du plan (ABC).

b- Calculer l'aire du triangle ABC, en déduire d(A,(BC))

3) Soit S la sphère de centre A et passant par B et soit P : $x - y + z - 1 = 0$

a- Calculer la rayon R de la sphère S.

b- Montrer que s et P sont sécants suivant un cercle ζ.

c- Déterminer le rayon r et les coordonnées du centre J de ζ .

4) a- Déterminer une équation cartésienne du plan Q tangent à S en B.

b- Etudier la position relative de P et Q puis déterminer $\Delta = P \cap Q$.

c- Soit la droite D : $\begin{cases} x = 1+\beta \\ y = 2\beta \\ z = 3+\beta \end{cases}$; $\beta \in IR$; calculer d(Δ,D).

EXERCICE N°2 :

Soit $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

On considère les points A(0,1,2) ; B(2,0,3) ; C(-1,0,0) et I(1,2,1).

1) a- Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b- On désigne par P le plan (ABC).Montrer que l'équation de P est $x + y - z + 1 = 0$

2) Soit la sphère S dont une équation cartésienne est : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 3 = 0$

a- Montrer que S a pour centre le point I et déterminer son rayon.

b- Montrer que le plan P est tangent à S au point A.

c- Calculer le volume du tétraèdre IABC.

3) Soit H le milieu du segment [IA] et Q le plan passant par H et parallèle à P .

a- Montrer que le plan Q et la sphère S sont sécants en un cercle ζ.

b- Déterminer le centre et le rayon du cercle ζ.

EXERCICE N°3 :

Soit l'espace muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, les points A (1,-2,2) ;

B (1,0 ,1) et l'ensemble S des points M(x, y, z) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z = 0$.

1) Montrer que S est une sphère dont on précisera son centre I et son rayon R.

2) Soit P le plan passant par E(1,1,-1) et perpendiculaire à la droite (AB).

a- Déterminer une équation cartésienne du plan P.

b- Montrer que P et S sont tangents et préciser les coordonnés de leur point de contact H.

3) Soit Q le plan tangent à S en B.

a- Montrer qu'une équation cartésienne du plan Q est $-2x + z + 1 = 0$.

b- Montrer que les plans P et Q sont sécants et déterminer la droite $\Delta = P \cap Q$.

c- Montrer que $\Delta \cap S = \varnothing$.

4) Soit Q_m : $-2x + z + m = 0$ ou m est un paramètre réel.

a- Déterminer suivants les valeurs de m : $S \cap Q_m$.

b- Montrer que Q_0 coupe la sphère S suivant un cercle ζ qu'on déterminera son rayon r et son centre H'.

EXERCICE N°4 :

Soit l'espace muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et soit l'ensemble S des points M(x, y, z) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 2 = 0$.

1) Montrer que S est une sphère dont on précisera son centre I et son rayon R.

2) Soit P_m le plan d'équation : $2x - y + 2z + 3m - 4 = 0$; $m \in IR$.

a- Montrer que P_0 et S sont tangents.

b- Etudier suivant les valeurs de m les positions relatives de P_m et S.

c- Montrer que $S \cap P_1$ est un cercle qu'on déterminera son rayon r et son centre H.

3) Soit le point A(-1,0,1).

Vérifier que $A \in S$ et déterminer une équation cartésienne du plan Q tangent à S en A.

4) Soit le point B(1,2,1) et $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

a- Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par B et de vecteur directeur $\vec{u}$.

b- Déterminer $\Delta \cap S$.

EXERCICE N°5 :

L'espace muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère :

- Les points A(0, 0, 3) ; B(2, 0, 4) ; C(-1, 1, 2) et D(1, -4, 0).
- Les plans P_1 : 7x + 4y – 3z + 9 = 0 et P_2 : x – 2y = 0.
- Les droites D_1 et D_2 définies par leurs systèmes d'équations paramétriques respectifs :

$$\begin{cases} x = -1+\alpha \\ y = -8+2t \\ z = -10+5\alpha \end{cases} ;\alpha \in IR \qquad \begin{cases} x = 7+2\beta \\ y = 8+4\beta \\ z = 8-\beta \end{cases} ;\beta \in IR$$

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.

	a	b	c	d
1. Le plan P_1 est	Le plan (ABC)	Le plan (BCD)	Le plan (ACD)	Le plan (ABD)
2. La droite D_1 contient	Le point A	Le point B	Le point C	Le point D
3. Position relative de P_1 et D_2	D_2 est strictement parallèle à P_1	D_2 est incluse dans P_1	D_2 coupe P_1	D_2 est orthogonale à P_1
4. L'intersection de P_1 et de P_2 est une droite dont une représentions paramétrique est :	$\begin{cases} x = t \\ y = -2+\frac{1}{2}t \\ z = 3t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 3+6t \end{cases}$	$\begin{cases} x = 5t \\ y = 1-2t \\ z = t \end{cases}$	$\begin{cases} x = -1+t \\ y = 2+t \\ z = -3t \end{cases}$
5. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} =$	$\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$	$\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$	$\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$	$-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$
6. Le volume du tétraèdre ABCD est égal à :	$\frac{9}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{6}$

<u>EXERCICE N°6</u> :

L'espace muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points A(3, 2, -1) ; B(-6, 1, 1) ; C(4, -3, 3) et D(-1, -5, -1).

1) a- Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$.
   b- En déduire l'aire du triangle BCD.
   c- Déduire que l'équation du plan (BCD) est : 2x + 3y – 4z + 13 = 0
2) a- Calculer le volume du tétraèdre ABCD.
   b- En déduire la hauteur AH.
   c- Déterminer les coordonnés du point H projeté orthogonal de A sur la plan (BCD).
3) Soit S la sphère de centre A et de rayon 6.
   a- Montrer que S et le plan (BCD) sont sécants
   b- Déterminer le rayon du cercle $\zeta = S \cap (BCD)$.
5) Calculer la distance de deux droites (BD) et Δ ayant pour représentation paramétrique :

$$\Delta : \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \ ; \ (\lambda \in IR) \\ z = 2-\lambda \end{cases}$$